Crecimiento económico y redistribución: una actualización desde los juegos dinámicos

Por: Robert Sampi[1]

Resumen

Partiendo del juego diferencial planteado por K. Lancaster, donde tantos lo consumidores trabajadores y consumidores inversionistas tratan de maximizar, conociendo la evolución del stock de capital, su consumo sobre un horizonte temporal infinito, nosotros, consideramos que ambos agentes buscan maximizar el valor actual de su consumo, cuando los dos actualizan a tasas distintas.

Con este planteamiento determinaremos las soluciones optimas dentro de una economía centralizada, como un juego no cooperativo (soluciones *a la* Nash) y soluciones cooperativas de Pareto forzadas por el planificador social, y comparar con la solución del modelo en una economía descentralizada; donde las tasas de crecimiento económico son convergentes a un estado estacionario y se obtienen tasas elevadas de inflación; empero mayores niveles de consumo. Alternativamente se encontró la solución cooperativa entre agentes (Valor de Shapley) pudiéndose confirmar, que, en un juego capitalista se sigue verificando el principio cooperativo, en el cual el máximo beneficio se obtiene bajo la cooperación.

Palabras Clave: Juego diferencial, juego no cooperativo y juego cooperativo.

Clasificación JEL: C61, C71, C72, C73

Abstract

Based on the differential game proposed by K. Lancaster, where so many workers and consumers as consumers try to maximize investors, knowing the evolution of capital stock, consumption over an infinite time horizon, we believe that both agents seek to maximize the present value of consumption, when the two updated different rates.

This approach determines the optimum solution in a centralized economy as a non-cooperative game (solutions to Nash) and cooperative Pareto solutions forced by the social planner, and compare the model solution in a decentralized economy, where rates economic growth are converging to a steady state and obtain high rates of inflation, however higher levels of consumption. Alternatively, the cooperative solution found between agents (Shapley value) and can be confirmed, that in a capitalist game continues to monitor the cooperative principle, in which the maximum benefit is obtained in the cooperation.

Keywords: Differential game, non-cooperative game and cooperative game.

Classification JEL: C61, C71, C72, C73

[1] Estudiante de la escuela de Economía en la Universidad Católica Santo Toribio de Mogrovejo (USAT). Chiclayo-Perú.
Deseo agradecer al profesor Ciro Bazán (USAT) y a la profesora Julia Maturana (USAT) por sus valiosos comentarios y sugerencias. Asimismo, agradecer la compresión de mi madre y hermanas, como de Cinthya Matta.

1. Introducción

Desde la publicación del libro de von Neumann y Morgensten (1994) *The Theory of Games and Behavior,* muchos autores se han basado en la teoría de juegos para representar una basta gama de situaciones de conflicto dinámico en el campo de la teoría económica sin embargo, podemos considerar el trabajo de Kelvin Lancaster (1973) como la primera referencia de la aplicación de los juegos diferenciales al crecimiento económico y la redistribución en nuestra economía moderna. Lancaster formuló un juego diferencial entre dos agentes llamados *trabajadores* y *capitalistas*, basado en los tópicos de la acumulación y la redistribución de los beneficios entre las clases sociales, estudiado por los clásicos como Malthus, Ricardo o Marx; llegando a la conclusión que los resultados cooperativos superan a los no cooperativos.

Seguidamente al trabajo de Lancaster, Hoel (1978), estudió el efecto de considerar como función de utilidad de los jugadores los consumos descontados en el tiempo. Por otro lado Pohjola (1983) comparó la solución de Nash hallada por Lancaster con la solución de Stackelberg en ciclo abierto. Este artículo sería años después comentado por de Zeeuw (1992) mostrando que la solución hallada por Pohjola no es completa y que existen infinitos equilibrios de Stackleberg. Paralelamente, Soto y Ramos (1992), realizan la misma comparación de resultados en un juego con solución de Stackelberg, y uno en solución cooperativa de Pareto, modificando el modelo, donde ambos jugadores buscan maximizar el valor actual de su consumo, cuando los dos actualizan al mismo tanto, llegando al resultado que la solución cooperativa de Pareto es mas eficiente al hallado en solución de Stackelberg.

Por último, se hallarán las soluciones del juego diferencial, con modificaciones al planteamiento original de Lancaster, comparando las soluciones halladas *a la* Nash y la solución Paretiana, bajo una economía centralizada y soluciones en una economía descentralizada en un horizonte infinito de tiempo, donde los dos agentes descuentan a valor actual sus consumos a distintas tasas, posteriormente se estudiará el comportamiento dinámico del modelo de crecimiento económico planteado, modificando la regla de oro planteada por Ramsey (1928) de manera que se maximice el consumo de ambos agentes a lo largo del tiempo de manera constante y se determine el valor de redistribución que se debe otorgar en la economía para ambos agentes.

2. El modelo

Se considera una economía cerrada, cuya producción $Y(t)$, en un instante del tiempo *t* puede ser o bien consumida o destinada a la inversión del stock de capital $K(t)$. En esta economía unisectorial se encuentran dos agentes sociales llamados "consumidores trabajadores" y "consumidores inversionistas", supondremos que la función de producción adopta la forma propuesta por Rebelo (1991): $Y(t) = A \cdot K(t)$, donde *A* es el parámetro tecnológico. Adicionalmente se adoptan algunos supuestos del modelo propuesto por Ramsey (1928), como la vida infinita que posen los individuos, esto debido a la existencia de dinastías. También, tendremos en cuenta que la población crece a una tasa *n* y que no hay depreciación física de capital o que $Y(t)$ es la producción neta en vez de la producción bruta.

En cada instante del tiempo los "consumidores trabajadores" pueden controlar con una variable $\alpha(t)$ la proporción del output total que se destinara a su consumo. Siguiendo a González (1998) supondremos que esta variable se encuentra definida en un intervalo $[a,b] \subseteq [0,1]$. En el modelo original de Lancaster-Hoel se asume que $b > \frac{1}{2}$. Nosotros al igual que González, prescindiremos de esta restricción que no nos parece suficientemente justificada. El consumo instantáneo de los trabajadores lo notaremos por $C_1(t)$ y viene dado por: $C_1(t) = \alpha(t) \cdot \theta \cdot f[K(t)]$, en donde θ es la propensión marginal al consumo.

Por su parte los "consumidores inversionistas" tienen a su disposición todo el output no consumido por los "consumidores trabajadores", que lo destinan bien para su propio consumo o para reinvertirlo en el sistema económico. Con la variable $\beta(t) \in [c,d] \subseteq [0,1]$ controlan la proporción destinada a la inversión. El resto $C_2(t)$, constituye su consumo: $C_2(t) = [1-\alpha(t)] \cdot [1-\beta(t)] \cdot \theta \cdot f[K(t)]$.

En esta economía la inversión viene dada por la variación en la acumulación en el stock de capital. Esto nos conduce a la siguiente ecuación diferencial:

$$\dot{K}(t) = I(t) = [1-\alpha(t)] \cdot \beta(t) \cdot \theta \cdot f[K(t)] \quad (1)$$

Los jugadores buscan maximizar su utilidad a lo largo de un horizonte infinito de tiempo, a diferencia del modelo planteado por Lancaster (1973), Pohjola (1983), Hoel (1978), Soto y Fernández (1992) y González (1998) quienes trabajan con un horizonte temporal finito. Siguiendo a Hoel, la utilidad nosotros la identificaremos con el consumo utilizando de un factor de descuento positivo que denotaremos como λ para los "consumidores trabajadores" y ψ para los "consumidores inversionistas". De esta manera tenemos la función de pagos de cada uno de los jugadores:

$$J_1 = \int_0^{+\infty} \alpha(t) \cdot \theta \cdot f[K(t)] e^{-\lambda t} \cdot dt \quad (2)$$

$$J_2 = \int_0^{+\infty} [1 - \alpha(t)] \cdot [1 - \beta(t)] \cdot \theta \cdot f[K(t)] e^{-\psi t} \cdot dt \quad (3)$$

Únicamente queda por fijar un estado del stock de capital en el instante inicial: $K(0) = K_0$ (4)

El juego consistirá en encontrar para cada jugador una función de control a lo largo del tiempo que varié en $[a, b]$ y $[c, d]$ respectivamente para cada jugador, de forma que maximice (2) y (3) sujeto a la dinámica del sistema descrita por (1) y a una condición inicial dada por (4).

3. Implicancias en una economía centralizada

En esta economía existe un planificador social benevolente, que busca maximizar el bienestar de la sociedad medido como el nivel que estos consumen.

3.1 Solución no cooperativa: Equilibrio de Nash

El cálculo de los equilibrios de Nash supone la maximización de las funcionales objetivo buscando las acciones que maximizan el pago de un jugador mientras se considera fijo el de otro. En esta situación definiremos dos hamiltoneanos para cada jugador respectivamente, de esta manera tendremos para los "consumidores trabajadores":

$$H_1(t,K(t),\alpha(t),\beta(t),m_1(t)) = \alpha(t)\cdot\theta\cdot f[K(t)]\cdot e^{-\lambda t} + \\ + m_1(t)[[1-\alpha(t)]\cdot\beta(t)\cdot\theta\cdot f[K(t)]] \quad (5)$$

Y el de los "consumidores inversionistas":

$$H_2(t,K(t),\alpha(t),\beta(t),m_2(t)) = [1-\alpha(t)]\cdot[1-\beta(t)]\cdot\theta\cdot f[K(t)]\cdot e^{-\psi t} + \\ + m_2(t)[[1-\alpha(t)]\cdot\beta(t)\cdot\theta\cdot f[K(t)]] \quad (6)$$

La solución de este problema de control óptimo, se resolvió basado en el principio del máximo de Pontrygain, teniendo en cuenta que $\dot{K}(t) = (1-\alpha(t))\beta(t)\theta f[K(t)]$ y $K(0) = K_0$; con lo cual los controles óptimos serán: $(\alpha^*(t) = b \text{ y } \beta^*(t) = c)$.

Las variables de coestado de problema serán:

$$\begin{cases} m_1 = \dfrac{b\cdot\theta\cdot A\cdot e^{-\lambda t}}{\lambda - A\cdot\theta\cdot(1-b)\cdot c} + Q_1\cdot e^{-[A\cdot\theta\cdot(1-b)\cdot c]t} \\ \\ m_2 = \dfrac{(1-c)\cdot(1-b)\cdot\theta\cdot A\cdot e^{-\psi t}}{\psi - A\cdot\theta\cdot(1-b)\cdot c} + Q_2\cdot e^{-[A\cdot\theta\cdot(1-b)\cdot c]t} \end{cases} \quad (7)$$

En el instante $\vec{t}$ en el que se deja de utilizar la combinación $(\alpha^*(t) = b \text{ y } \beta^*(t) = c)$, será aquel en el que cesen de verificarse las condiciones de optimalidad del par de control. Para hallarlo resolveremos en t las ecuaciones $e^{-\lambda t} = m_1(t)\beta(t)$ y $m_2(t) = e^{-\psi t}$. En el cual t_1 y t_2 a las soluciones respectivas de las ecuaciones anteriores, si existen y se encuentran en el intervalo $[0,+\infty)$; en otro caso, le damos valor cero. Es de notar que para la resolución de las ecuaciones habrá que aproximar las ecuaciones a través de sucesiones de Taylor.

$$t_1 \approx \frac{A\cdot\theta\cdot(b\cdot(c^2 - c\cdot Q_1\cdot -1) - c\cdot(c-Q_1)) + \lambda\cdot(c-Q_1)}{A^2\cdot c^2\cdot Q_1\cdot\theta^2\cdot(b-1)^2 + A\cdot\theta\cdot\lambda\cdot(b\cdot(c^2 + c\cdot Q_1 - 1) - c\cdot(c+Q_1)) + c\cdot\lambda^2}$$

$$t_2 \approx \frac{A\cdot c\cdot\theta\cdot(b-1)\cdot(Q_2 - 1) - b\cdot\theta\cdot(c-1) + c\cdot\theta - Q_2\cdot\psi - r + \psi}{A^2\cdot c^2\cdot Q_2\cdot\theta^2\cdot(b-1)^2 - A\cdot c\cdot\theta\cdot\psi\cdot(b-1)\cdot(Q_2 - 1) + \psi\cdot(b\cdot\theta\cdot(c-1) + c\cdot\theta - \theta + \psi)}$$

Para el valor de par de controles óptimos, el valor del stock de capital en la economía será:

$$K(t) = K_0\cdot e^{[\theta\cdot A\cdot(1-b)\cdot c]t} \quad (8)$$

La condición de transversalidad

Dada la condición $\lim\limits_{t\to\infty}(m_t \cdot k_t) = 0$, entonces reemplazamos los valores de (7) y (8), para despejar los valores de las constantes Q_1 y Q_2;

$$\lim_{t\to\infty}\left(\left[\frac{b\cdot\theta\cdot A\cdot e^{[\theta\cdot A\cdot(1-b)\cdot c-\lambda]t}}{\lambda - A\cdot\theta\cdot(1-b)\cdot c} + Q_1\right]\cdot[K_0\ \cdot]\right) = 0 \text{ y}$$

$$\lim_{t\to\infty}\left(\left[\frac{(1-c)\cdot(1-b)\cdot\theta\cdot A\cdot e^{[\theta\cdot A\cdot(1-b)\cdot c-\psi]t}}{\psi - A\cdot\theta\cdot(1-b)\cdot c} + Q_2\right]\cdot[K_0\ \cdot]\right) = 0$$

Es importante acotar, como condición necesaria, que $[\theta A(1-b)c-\lambda] < 0$ y $[\theta A(1-b)c-\psi] < 0$, lo que exige que el valor de Q_1 y Q_2, sean equivalentes a cero.

Valor de redistribución

El valor de redistribución que se deberá otorgar a lo largo del tiempo los dos agentes de este sistema económico, "consumidores trabajadores" y "consumidores inversionistas", deberá ser la función de pagos expresado en (2) y (3), entonces el valor que se debe redistribuir en la economía para ambos agentes, a fin de maximizar su utilidad expresada en su consumo será:

$$\begin{cases} J_1 = \dfrac{b\theta AK_0}{\lambda - \theta A(1-b)c} \\[2ex] J_2 = \dfrac{(1-c)(1-b)\theta AK_0}{\psi - \theta A(1-b)c} \end{cases} \quad (9)$$

Derivando las funcionales objetivas óptimas respecto a K_0, se obtiene:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial J_1}{\partial K_0} = \dfrac{b\theta A}{\lambda - \theta A(1-b)c} \\[2ex] \dfrac{\partial J_2}{\partial K_0} = \dfrac{(1-c)(1-b)\theta A}{\psi - \theta A(1-b)c} \end{cases}$$

Se puede apreciar que las derivadas anteriores nos periten dar interpretaciones de precio a la variable de coestado. El producto $m_1 e^{\lambda t}$ mide, aproximadamente, el incremento en la utilidad total óptima del jugador 1, al incrementar el requerimiento inicial sobre el stock de capital en una unidad. De manera similar, el producto $m_2 e^{\psi t}$ mide, aproximadamente el incremento en la utilidad total óptima del jugador 2, al incrementar el requerimiento inicial sobre el stock de capital en una unidad.

3.2 Solución Cooperativa: Óptimos de Pareto

Ahora vamos a encontrar los elementos no dominados del conjunto de todos los pagos posibles en el juego descrito anteriormente. En el cual, el planificador social, ínsita al estado cooperativo, para esto definimos una función de bienestar social en la que se suman los pagos a los jugadores dador por J_1 y J_2 , ponderados de acuerdo con su capacidad o poder de decisión:

$$\begin{aligned}
&\text{Max.} \quad W = \lambda J_1 + (1-\lambda) J_2 \\
&\text{s.a. :} \\
&\quad \alpha(t) \in [a, b],\ \beta(t) \in [0,1] \quad \forall\, t \in [0, +\infty) \qquad (8) \\
&\quad \dot{K}(t) = (1-\alpha(t))\,\beta(t)\,\theta\, f[K(t)] \\
&\quad K(0) = K_0
\end{aligned}$$

Entonces el hamiltoneano del problema de control óptimo será:

$$\begin{aligned}
H(t, K(t), \alpha(t), \beta(t), m(t)) &= \left[\lambda\alpha(t)e^{-\delta t} + (1-\lambda)(1-\alpha(t))(1-\beta(t))e^{-\delta t}\right]\theta f[K(t)] \\
&\quad + m(t)(1-\alpha(t))\beta(t)\theta f[K(t)] \qquad (9) \\
&= e^{-\delta t}\theta f[K(t)]\left\{\lambda\alpha(t) + \left[(1-\lambda)(1-\beta(t)) + m(t)e^{\delta t}\beta(t)\right](1-\alpha(t))\right\}
\end{aligned}$$

En las soluciones plausibles de los controles óptimos a utilizarse, resaltamos la combinación posible de $(\alpha(t) = b, \beta(t) = 1)$ y $(\alpha(t) = b, \beta(t) = 0)$, los cuales serán utilizados como periodos que tomara el planificador social, denominados de "**Máxima acumulación**", y "**Consumo máximo**", respectivamente. Así, el periodo de consumo máximo, se interpreta como el periodo idóneo para estimular la economía, mientras que el periodo de máxima acumulación es el periodo que se debe analizar si se busca preverse de alguna crisis que afecte el crecimiento de la economía.

Para estos dos periodos existen, valores de redistribución del consumo para ambos agentes, que maximizan su consumo:

$$\text{“Consumo máximo”} \begin{cases} J_1 = \dfrac{b\theta AK_0}{\lambda} \\ \\ J_2 = \dfrac{(1-b)\theta AK_0}{\varphi} \end{cases}$$

Mientras que para el periodo de “Máxima acumulación” habrá que considerar que $[\theta A(1-b)-\lambda]<0$, entonces el valor de redistribución a los agentes será:

$$\text{“Máxima acumulación”} \begin{cases} J_1 = \dfrac{b\theta AK_0}{\lambda - \theta A(1-b)} \\ \\ J_2 = 0 \end{cases}$$

3.3 El crecimiento económico

En esta economía- considerando que el planificador social asume la no cooperación- es importante resaltar que la tasa de crecimiento de la producción per cápita coincidirá con la tasa de crecimiento del stock de capital en términos per cápita y con el consumo en términos per cápita.

$$\gamma_y = \gamma_k = \gamma_{\bar{c}} = \theta \cdot A \cdot (1-b) \cdot c - n \quad (10)$$

Sin embargo, el análisis de la ley de evolución del capital per cápita, nos conlleva a tres casos distintos, en los cuales dos de ellos nos incitan hacia un posible estado estacionario.

$$\dot{k} = [\theta A(1-b)c - n]k = 0 \quad \begin{cases} \text{Caso I} : k = 0 & \begin{cases} a)\ \theta A(1-b)c > n \\ b)\ \theta A(1-b)c < n \end{cases} \\ \text{Caso II} : k \neq 0 & \{c)\ \theta A(1-b)c = n \end{cases} \quad (11)$$

Estos tres casos mostrados en (11), tienen distintas interpretaciones económicas, el Caso I, hace referencia al estado extremo de una economía que no posee stock de capital o agoto sus recursos para generarlos, en el cual se puede generar dos hipotéticos subcasos, a) Una economía en la cual $\theta A(1-b)c>n$, entonces la ley de evolución del stock de capital, generara crecimiento económico, entonces en una economía se impondrá como condición necesaria para generar crecimiento económico la aplicación de este Caso. Quedando así modificada la nueva regla de oro del stock de capital, a la simplicidad de una desigualdad, que se deberá verificar a lo largo del tiempo.

$$(1-s)A(1-b)c - n > 0$$
$$s < 1 - \frac{n}{A(1-b)c} \quad .$$

b) Una economía en la cual $\theta A(1-b)c < n$, lo que implicaría que la tasa de crecimiento de la economía seria decreciente a lo largo del tiempo.

El Caso II, tenemos una economía en la cual la tasa de crecimiento poblacional es igual al valor de $\theta A(1-b)c$, y dado que $\theta = 1-s$, en donde *s* es la propensión marginal al ahorro, en esta economía, la política de ahorro ha propiciado, una tasa de ahorro que no genera crecimiento económico:

$$(1-s)A(1-b)c - n = 0$$
$$s = 1 - \frac{n}{A(1-b)c}$$

La evolución grafica de la ley del stock de capital, se representa de la siguiente manera:

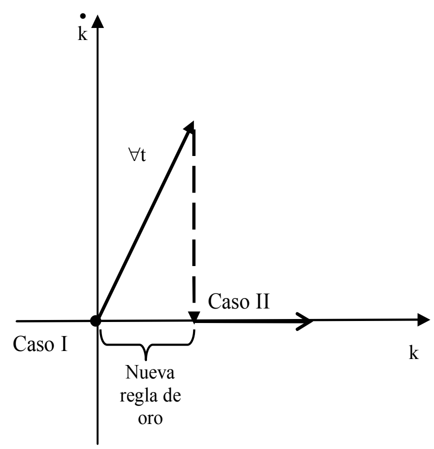

Figura 1: Ley de evolución del stock de capital per cápita

Retomando, las tasas de crecimiento económico, de acuerdo a la Figura 1, el uso de cada caso en la economía, trae como consecuencia distintas tasas de crecimiento en el stock de capital y en la producción per cápita. Dentro del caso I, existe sub casos muy particulares, que nos son de mucho interés económicos, para ello nos apoyaremos en la solución cooperativa incitada por un planificador social, y mostrar el comportamiento de la economía frente al periodo de "Máxima acumulación" y "Consumo máximo"

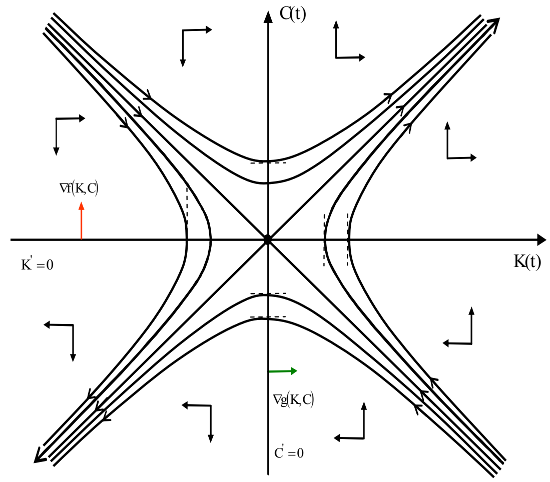

Figura 2: Dinámica del consumo y el capital (diagrama de fase)

En una economía, de "Máxima acumulación", en donde la tasa de crecimiento será de $\gamma_k = (1-b)\theta A - n$, suponiendo que se cumple la nueva regla de oro, esta tasa de crecimiento será siempre creciente a lo largo del tiempo, por el contrario de aproximar el valor de la propensión marginal al ahorro al valor de $1 - \frac{n}{A(1-b)c}$, la tasa de crecimiento del stock de capital disminuirá continuamente en el tiempo. Por ultimo bajo una política de "Consumo máximo" la tasa de crecimiento de la economía será negativa, $\gamma_k = -n$.

Finalmente de cumplirse con la nueva regla de oro, la dinámica del modelo nos indica que a medida que aumenta el stock de capital en términos agregados se maximizara el consumo de estos, logrando así mayor utilidad a los agentes de esta economía.

La dinámica del sistema, nos muestra un punto de ensilladura, en el cual el único punto de equilibrio es el origen, y las soluciones del modelo son las hipérbolas, las cuales muestran que a lo largo del tiempo el consumo crece en forma permanente a medida que se aumenta el stock de capital en términos agregados.

3.4 La convergencia de las economías

Para analizar la convergencia entre países, supongamos que existe un conjunto de países para los que los parámetros θ, A, b, c y n tienen los mismo valores. Si suponemos que la única diferencia entre ellos es el valor inicial del stock de capital por persona, *k(0),* el modelo entonces predice que la tasa de crecimiento de los países considerados será constante e igual a $\gamma_y = \gamma_k = \gamma_{\bar{c}} = \theta \cdot A \cdot (1-b) \cdot c - n$. Este modelo, por tanto, no predice la convergencia entre las economías, ni absoluta ni condicionalmente, ya que la tasa de crecimiento no esta relacionada con la renta.

Supongamos ahora que los países se diferencian en el parámetro que denota la productividad, *A.* dado que la tasa de crecimiento de las economías viene dada por la ecuación (19), los países que tengan una tasa de crecimiento elevada continuaran así de forma indefinida, mientras que aquellos países con un crecimiento bajo se mantendrán para siempre con tasa de crecimiento reducidas, independientemente del valor de la renta o de su producto inicial.

4. Implicancias en una economía descentralizada

Ahora procedemos a encontrar la redistribución óptima, cuando no existe la presencia de un planificador social que se preocupe por el bienestar de los agentes de la economía. Por lo que los agentes económicos son los llamados a encontrar los valores de decisión (k_t)y (c_t).

Suponemos que existen dos mercados de factores (insumos productivos), uno para servicios de trabajo, el salario denotado por "w_t"; "r_t" es el precio del alquiler del capital. Basados en el modelo introducido por Sidrauski (1967), adicionalmente el Banco Central imprime dinero fiduciario (con un costo nulo) y los bienes reales que obtiene a cambio los regresa a las familias en forma de una transferencia S.

Entonces, definimos las variables "M" como los balances nominales o saldos nominales, "p" el índice de precios y "m" (M/p) como los balances reales o saldos reales; y por ultimo introducimos la variable "$\pi = \frac{\dot{p}}{p}$"la tasa de inflación de la economía.

En términos reales y per cápita, la restricción presupuestal de la familia representativa esta dada por:

$$w + rk + S = c + \frac{\dot{K}}{L} + \frac{\dot{M}}{p}$$

En donde $\frac{\dot{M}}{p}$ representa la "inversión" en balances nominales expresada en términos reales. Notemos que: $k = \frac{K}{L} \Rightarrow \dot{k} = \frac{\dot{K}}{L} - kn$ y $m = \frac{M}{p} \Rightarrow \dot{m} = \frac{\dot{M}}{p} - \pi m$. Y la restricción presupuestaria de la familia representativa quedara modificada:

$$w + rk + S = c + \dot{k} + kn + \dot{m} + \pi m \quad (12)$$

Es claro de (12) que los balances reales pueden interpretarse como un activo que se deprecia a una tasa igual a la inflación π.

El problema que resuelve la familia representativa, cambiara de acuerdo al consumo que se considere, el del "trabajador" o "capitalista". Asumiendo que se da preferencia a consumir el "trabajador" y posteriormente el "capitalista", los problemas a maximizar serán:

$$J_1 = \int_0^{+\infty} \alpha(t) \cdot \theta \cdot f[k(t)] e^{-\lambda t} \cdot dt \quad (13)$$

$$J_2 = \int_0^{+\infty} (1 - \alpha(t))(1 - \beta(t)) \cdot \theta \cdot f[k(t)] e^{-\psi t} \cdot dt \quad (14)$$

$$\begin{aligned} &\text{s.a}: \\ &\dot{k} = w + (r - n)k + S - \alpha(t) \cdot \theta \cdot f[k(t)] - \left(\dot{m} + \pi m\right) \\ &\dot{m} = \phi \end{aligned}$$

Las variable de control son $\alpha(t)$, $\beta(t)$ y ϕ, las variables de estado son *k* y *m.* para expresar el problema en la forma estándar se define un control auxiliar ϕ, de manera que $\dot{m} = \phi$.

En esta situación definiremos dos hamiltoneanos para cada jugador respectivamente, de esta manera tendremos para los "consumidores trabajadores":

$$H_1(t,K(t),\alpha(t),\beta(t),\mu(t)) = \alpha(t)\cdot\theta\cdot f[K(t)]\cdot e^{-\lambda t} + \\ + \mu_1(t)\left[w + (r-n)k + S - \alpha(t)\cdot\theta\cdot f[k(t)] - \left(\dot{m} + \pi m\right)\right] \\ + \mu_2(t)[\phi] \quad (15)$$

Y el de los "consumidores inversionistas":

$$H_2(t,K(t),\alpha(t),\beta(t),\upsilon(t)) = [1-\alpha(t)]\cdot[1-\beta(t)]\cdot\theta\cdot f[K(t)]\cdot e^{-\psi t} + \\ + \upsilon_1(t)\left[w + (r-n)k + S - \alpha(t)\cdot\theta\cdot f[k(t)] - \left(\dot{m} + \pi m\right)\right] \\ + \upsilon_2(t)[\phi] \quad (16)$$

Aplicando las condiciones necesarias del principio del Máximo de Pontrygain, para que un par de controles $(\alpha^*(t),\beta^*(t))$, obtenemos:

$\lambda = \pi$ (17)

Resolviendo, para el "consumidor inversionista", tenemos:

$\psi = \pi$ (18)

Por lo que podemos afirmar, igualando (17) y (18), que el valor del factor de descuento intertemporal para ambos jugadores coincide con la tasa de inflación de la economía, por lo cual en una economía descentralizada, los jugadores tendrán expectativas adaptativas, con la cual ponderaran sus consumos presentes a cambio de consumo futuro, de acuerdo a la percepción que tengan de la tasa de inflación. Así una percepción de una tasa de inflación elevada, los jugadores exigirán mayor consumo actual a cambio de consumo futuro; y por el contrario, percepciones de una menor tasa de interés, los jugadores estarán dispuestos a otorgar mayor consumo actual por consumo futuro.

El problema del gobierno es simplemente satisfacer su restricción presupuestal suponiendo que transfiere todos los recursos obtenidos por la creación de dinero. Se debe cumplir entonces:

$$S = \dot{m} + \pi m \quad (19)$$

Donde S es la transferencia que se otorga al hogar representativo. De esta forma, la restricción presupuestal de la economía agregada se obtiene sustituyendo (19) en (12) y queda como:

$$\dot{k} = w + (r - n)k - c$$

Por lo cual, de la condición del principio de máximo, para el jugador "consumidor trabajador":

$$\mu_1 = \frac{[\theta\alpha(t)A + \pi]e^{-\pi t}}{[\theta\alpha(t)A - (r - n)]}$$

Y el valor del stock de capital per cápita, dado un α será:

$$k(t) = \frac{w}{(r - n - A\theta\alpha)} + (k_0 - k^*)e^{[A\theta\alpha + n - r]t}$$

Y por la condición de transversalidad, tenemos:

$$\lim_{t\to\infty}\left\{\frac{[\theta\alpha(t)A + \pi]e^{-\pi t}}{[\theta\alpha(t)A - (r - n)]}\cdot\left(\frac{w}{(r - n - A\theta\alpha)} + (k_0 - k^*)e^{[A\theta\alpha + n - r]t}\right)\right\} = 0$$

De la cual desprendemos, que el valor de $\alpha(t)$, será el mínimo valor que pueda adoptar, para que la condición de transversalidad no sea alterada. Por lo cual, el valor optimo de $\alpha(t)$ será $\alpha^*(t) = a$.

De manera similar, para el jugador "consumidor inversionista", el valor de la variable de coestado será:

$$\upsilon_1 = \frac{[\theta(1 - \alpha(t))(1 - \beta(t))A + \pi]e^{-\pi t}}{[\theta(1 - \alpha(t))(1 - \beta(t))A - (r - n)]}$$

Y el valor del stock de capital per cápita, dado un α y β, será:

$$k(t) = \frac{w}{(r - n - (1 - \alpha(t))(1 - \beta(t))A\theta)} + (k_0 - k^*)e^{[A\theta(1-\alpha(t))(1-\beta(t)) + n - r]t}$$

Y por la condición de transversalidad, tenemos:

$$\lim_{t\to\infty}\left\{\frac{[\theta(1 - \alpha(t))(1 - \beta(t))A + \pi]e^{-\pi t}}{[\theta(1 - \alpha(t))(1 - \beta(t))A - (r - n)]}\cdot\left(\frac{w}{(r - n - (1 - \alpha(t))(1 - \beta(t))A\theta)} + (k_0 - k^*)e^{[A\theta(1-\alpha(t))(1-\beta(t)) + n - r]t}\right)\right\} = 0$$

De la cual desprendemos, que el valor de $\beta(t)$, será el máximo valor que pueda adoptar, para que la condición de transversalidad no sea alterada. Por lo cual, el valor optimo de $\beta(t)$ será $\beta^*(t) = d$.

Es fácil, darnos cuenta que en esta economía descentralizada, nos encontramos con la presencia de estados estacionarios del stock de capital en términos per cápita así mismo del consumo, y esto por el hecho de que al largo plazo, el stock de capital per cápita que puedan generar los agentes económicos es limitado , es decir es agotable.

El stock de capital de estado estacionario para el "consumidor trabajador" es:

$$k^*(t) = \frac{w}{(r - n - A\theta\alpha)}$$

El stock de capital de estado estacionario para el "consumidor inversionista" es:

$$k^*(t) = \frac{w}{(r - n - (1-\alpha(t))(1-\beta(t))A\theta)}$$

En ambos casos, podemos observar que para que exista este estado estacionario con sentido económico, debemos considerar como condición necesaria que $r > n - (1-\alpha(t))(1-\beta(t))A\theta$, es decir que conforme aumente el crecimiento poblacional, obtendremos mayores tasas de interés en la economía.

Dinámica del modelo descentralizado

Para estudiar la dinámica del modelo, consideramos la dinámica que rige al jugador "consumidor trabajador" dado que la dinámica del jugador "consumidor inversionista" es similar.

Para estudiar la dinámica del modelo, utilizaremos el diagrama de fase de la figura 3, dibujando en el plano (k_t, c_t). Todos los puntos del primer cuadrante son factibles, excepto los puntos sobre el eje vertical arriba del origen, sin capital (esto es, si $(k_t = 0)$), la producción es cero, y por tanto "c" positivo no es factible.

El lugar geométrico de puntos (k_t, c_t) que satisface $\left(\dot{k} = 0\right)$ empieza desde el valor de w_t y no alcanza un máximo el valor del stock de capital per cápita

El lugar geométrico que satisface $\left(\dot{c} = 0\right)$ es vertical al stock de capital y viene dada como el valor de estado estacionario del stock de capital.

En cualquier punto arriba del lugar geométrico $\left(\dot{k} = 0\right)$, el capital per cápita es decreciente: el consumo esta encima del nivel que mantendría a k_t constante. De manera similar, k_t se incrementa en puntos debajo del lugar geométrico de $\left(\dot{k} = 0\right)$. En el caso del lugar geométrico $\left(\dot{c} = 0\right)$, el consumo se incrementa a la izquierda de dicho lugar geométrico donde $\left(k_t = k^*\right)$, y se decrementa a la derecha del lugar geométrico.

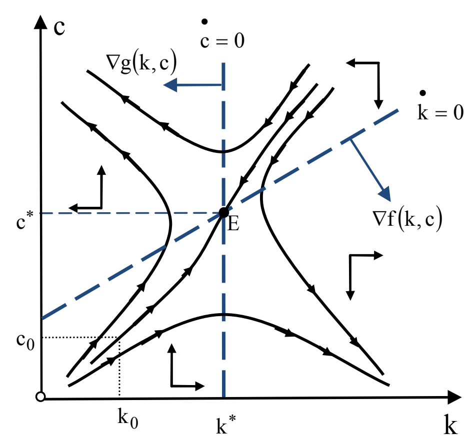

Figura 3: Dinámica del consumo y el capital (diagrama de fase)

Solo la trayectoria comenzada en un nivel de stock de capital “k_0” y “c_0” que nos conduzcan a lo largo del tiempo en la senda que converge hacia el punto “E”, será la trayectoria optima que se deberá cumplir para que la economía converga hacia el estado estacionario o que la condición de transversalidad se satisface.

Comportamiento local alrededor del estado estacionario

La liberalización de la dinámica del sistema genera otras ideas en el comportamiento dinámico de la economía.

Linealizando el sistema alrededor del estado estacionario:

$$\begin{cases} \dot{k} = w + (r - n)k - c = \phi_1 \\ \dot{c} = \theta a A(A\theta a + n - r)(k_t - k^*) = \phi_2 \end{cases}$$

Por el teorema de Taylor y despreciando los términos con derivadas de orden mayor a 1.

$$\phi_1(k,c) = \phi_1(k^*, c^*) + \frac{\partial \phi_1(k,c)}{\partial k}(k - k^*) + \frac{\partial \phi_1(k,c)}{\partial c}(c - c^*)$$
$$\phi_2(k,c) = \phi_2(k^*, c^*) + \frac{\partial \phi_2(k,c)}{\partial k}(k - k^*) + \frac{\partial \phi_2(k,c)}{\partial c}(c - c^*)$$

Considerando el estado estacionario:

$$\begin{cases} \dot{k}(t) \equiv \phi_1(k^*, c^*) = 0 \\ \dot{c}(t) \equiv \phi_2(k^*, c^*) = 0 \end{cases}$$

La linealización de las leyes del movimiento en las cercanías del estado estacionario da:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{k}} \\ \dot{\tilde{c}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma & -1 \\ \delta & 0 \end{bmatrix}}_{J} \begin{bmatrix} \tilde{k} \\ \tilde{c} \end{bmatrix} \quad (20)$$

Donde:

$$\begin{cases} \tilde{k} = k - k^* \\ \tilde{c} = c - c^* \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \dot{\tilde{k}} = \dot{k} \\ \dot{\tilde{c}} = \dot{c} \end{matrix}$$

El sistema (20) tendrá las siguientes soluciones:

$$\begin{matrix} \tilde{k} = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t} \\ \tilde{c} = b_1 e^{\lambda_1 t} + b_2 e^{\lambda_2 t} \end{matrix} \quad (21)$$

Donde λ_1 y λ_2 son las raíces características o "autovalores" de la matriz jacobiana y a_1, a_2, b_1 y b_2 son constantes a determinar.

Calculo de los autovalores:

$$\lambda_1 = \frac{\gamma + \sqrt{\Delta}}{2} \text{ y } \lambda_2 = \frac{\gamma - \sqrt{\Delta}}{2}$$

Donde $\Delta = \lambda^2 - 4\delta$ es el discriminante, y como $\delta < 0 \Rightarrow \Delta > 0$, por lo que las raíces características serán reales y distintas. Además $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 < 0$.

Para que el sistema formado por (21) converja al estado estacionario "E" deberemos eliminar le efecto explosivo de λ_1. Por lo que impondremos $a_1 = b_1 = 0$ y tomando como condiciones iníciales "k_0" y "c_0" tendremos:

$$k(t) = a_2 e^{\lambda_2 t} + k^* \Rightarrow k(0) = a_2 + k^* = k_0 \Rightarrow k(t) = (k_0 - k^*)e^{\lambda_2 t} + k^*$$
$$c(t) = b_2 e^{\lambda_2 t} + c^* \Rightarrow c(0) = b_2 + c^* = c_0 \Rightarrow c(t) = (c_0 - c^*)e^{\lambda_2 t} + c^*$$

Igualando el valor de $e^{\lambda_2 t}$ y despejando $c(t)$, obtenemos:

$$c(t) = \frac{(c_0 - c^*)}{(k_0 - k^*)}\left(k(t) - k^*\right) + c^* \quad (22)$$

La ecuación (23) representa la aproximación lineal de la senda óptima en los alrededores de "E".

La velocidad de convergencia esta dada por $|\lambda_2|$. En este caso $|\lambda_2|$ es una función creciente de "r" (en competencia perfecta equivale al valor de $(f'(k) = A)$) y una función decreciente de "n". Cuanto mayor sea el valor de la tasa de interés de la economía, o equivalentemente, a mayor nivel de tecnología, mas rápido será la acumulación de capital y la economía convergerá al estado estacionario. Sin embargo, mayores niveles de crecimiento de la población, más lento será la transición de la economía hacia el estado estacionario.

Crecimiento económico del modelo descentralizado

En esta economía es importante resaltar que la tasa de crecimiento de la producción per cápita coincidirá con la tasa de crecimiento del stock de capital en términos per cápita y con el consumo en términos per cápita.

$$\gamma_y = \gamma_k = \gamma_{\bar{c}} = (w - c)k^{-1} + (r - n) \quad (23)$$

La tasa de crecimiento de esta economía descentralizada, tiende a ser positiva con niveles de salarios mayores al consumo per cápita por jugador, y tasas de interés mayores al crecimiento poblacional.

Como medida para seguir teniendo tasas de crecimiento positivas a lo largo del tiempo, solamente se lograría con aumentos sucesivos del valor de los salarios, para logar desplazar la curva $(w-c)k^{-1}$ hacia la derecha.

Aumentos en el nivel de salarios, traerá como consecuencia inmediata, mayores niveles de consumo actual, por lo que la tasa de descuento intertemporal será mayor y simultáneamente la tasa de inflación aumentara equivalentemente.

Redistribución entre agentes

Para esta economía descentralizada, valores de redistribución del consumo para ambos agentes, que maximizan su consumo es:

$$\begin{cases} J_1 = \dfrac{a\theta Aw}{[r-n-Aa\theta]\pi} + \dfrac{(k_0-k^*)a\theta A}{[r+\pi-n-Aa\theta]} \\ J_2 = \dfrac{(1-a)(1-b)\theta Aw}{[r-n-A(1-a)(1-b)\theta]\pi} + \dfrac{(k_0-k^*)(1-a)(1-b)\theta A}{[r+\pi-n-A(1-a)(1-b)\theta]} \end{cases}$$

Ha de notarse que el pago recibido (redistribución de consumo) en la economía descentralizada es mayor al pago recibido en una economía centraliza (ya sea no cooperativa o cooperativa planificada), esto es explicado, dado que en esta economía la tasas de inflación son cada vez mayores conforme aumente el nivel de los salarios, y con ello aumenta el factor de descuento intertemporal, con lo que los agentes exigirán mayor consumo actual que consumo futuro.

5. Una solución alternativa: una solución de Shapley

Supondremos que los jugadores aceptan cooperar, la solución o reparto así obtenido dependerá de las propiedades propuestas, pero será la única que las verifica. Nosotros estudiaremos los resultados de una solución de Shapley.

Los juegos cooperativos estáticos se estudian mediante la definición de una función característica υ, que asocia a cada coalición de jugadores que coordine sus estrategias, en esta versión dinámica la función característica asignada a cada agente económico, será el pago recibido de su estrategia maximin.

El valor de Shapley para el caso de dos jugadores es como sigue:

$$\begin{cases} \phi_1 = \dfrac{1}{2}\left[\upsilon(\{1\}) + \upsilon(\{1,2\}) - \upsilon(\{2\})\right] \\ \\ \phi_2 = \dfrac{1}{2}\left[\upsilon(\{2\}) + \upsilon(\{1,2\}) - \upsilon(\{1\})\right] \end{cases} \quad (24)$$

Donde:

$$\upsilon(\{1\}) = J_1\left(\alpha^*(t), \beta^*(t)\right) = \frac{b\theta AK_0}{\lambda}$$

$$\upsilon(\{2\}) = J_2\left(\alpha^*(t), \beta^*(t)\right) = \frac{(1-b)\theta AK_0}{\psi}$$

Y considerando la solución paretiana del problema (8) en solución cooperativa, será:

$$\upsilon(\{1,2\}) = \frac{\psi a\theta AK_0 + (\lambda - (1-a)\theta A)((1-a)\theta AK_0)}{(\lambda - (1-a)\theta A)\psi}$$

Ahora, podremos hallar el valor de asignación cooperativo entre ambos jugadores:

Para el agente "Consumidor trabajador", el valor de Shapley será:

$$\phi_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{\theta AK_0\left[\psi(b + \lambda a) + \lambda(\lambda - (1-a)\theta A)(b-a)\right]}{\lambda\psi(\lambda - (1-a)\theta A)}\right]$$

Y, para el agente "Consumidor inversionista";

$$\phi_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{\theta AK_0\left[\lambda(1 - b + \psi) + (\lambda - (1-a)\theta A)(\lambda(1-a) - \psi b)\right]}{\lambda\psi(\lambda - (1-a)\theta A)}\right]$$

Es fácil darnos cuenta, que los pagos recibidos en cooperación entre agentes, es mucho mayor al pago asignado en una economía centralizada.

6. Conclusiones

Las innovaciones introducidas en el modelo de Lancaster; la existencia de tasas de descuento distintas para cada uno de los jugadores y la introducción de un marco institucional que acote los controles de los jugadores, enriquecen de manera considerable el análisis del juego diferencial de crecimiento económico, arribando a conclusiones como:

- Podemos afirmar que los equilibrios del juego hallados desde la perspectiva de una economía centralizada, vienen establecidos en el valor de redistribución entre agentes, por los parámetros (A, λ, ψ, θ) y por los valores establecidos en el proceso político de acotación de la discrecionalidad del control de los jugadores (a, b, c, d) y el optimo de Nash obtenido es de tipo bang-bang; obteniéndose un control optimo para los capitalistas de *c,* el cual se interpreta como el valor mínimo de capitalización permisible que debe regular el planificador social para maximizar el consumo en la economía.

- Se determina un óptimo de Pareto del conjunto de todos los pagos posibles en el juego, incitados por el planificador social y se establecen los controles que los alcanzan. Denotándose en este proceso dos etapas del stock de capital, de acumulación y consumo máximo.

- Con respecto a la dinámica del modelo, se obtuvo tasas de crecimiento positivas y constantes a lo largo del tiempo, para ello se modifico la regla de oro de Ramsey a una desigualdad que se deberá de cumplir a lo largo del tiempo para seguir maximizando el consumo, por otro lado las sendas de fase del modelo nos muestran un sistema globalmente inestable, pero que muestra un crecimiento constante del consumo a medida que aumenta el stock de capital.

- Se halla la solución desde la perspectiva descentralizada, en las cuales las controles óptimos de cada jugador son inversos a los hallados en la economía centralizada, donde el jugador capitalista obtiene una variable de control optima en su máximo valor de acotación (mayores niveles de capitalización), mientras que el jugador trabajador obtiene una variable de control optima en su mínimo valor de acotación (ínfimos valores de consumo). Y a diferencia de la economía centralizada, se obtienen estados estacionarios en la economía, y tasas de factor de descuento equivalentes a la tasa de inflación. También se demostró que bajo esta perspectiva, la economía tendrá tasas de interés elevadas y la dinámica del modelo, nos conduce a continuos aumentos en el nivel de salario que finalizara con mayores tasas de inflación. Y se evidencia que el valor de redistribución de consumo en la economía descentralizada es mayor al de una economía centralizada.

- Alternativamente, se realizo el análisis de tener una solución cooperativa entre agentes (valor de Shapley), donde estos pactaran los acuerdos del juego y ambos alcancen niveles máximos de consumo; bajo esta solución se demostró que la tasa de crecimiento de la economía será negativa. Y el valor de redistribución entre agentes es mayor al que se puede obtener en una economía centralizada y descentralizada (cuasi equivalente al agente "consumidor inversionista").

7. Bibliografía

Gonzales, C. (1998). "Modelos de crecimiento económico: aportaciones desde la teoría de los juegos dinámicos". Tesis Doctoral. Universidad de la Laguna.

Hoel, M. (1978). "Distribution and growth as a differential game between workers and capitalists". En: *International Economic Review,* N° 19, pp. 335-350.

Lancaster, K. (1973). "The Dynamic Inefficiency of Capitalism". En: *Journal of Political Economy,* Vol. 81, pp. 1092-1109.

Nash, J. (1951). "Non-Cooperative Games". En: *Annals of Mathematics*, Vol. 54, pp. 286-295.

Pohjola, M. (1985). "Growth, Distribution and Employment Modelled as a Differential Game". En: *Optimal Control Theory and Economic Analysis 2.* pp. 265-290.

Ramsey, F. (1928). "A Mathematical Theory of Savings". En: *Economic Journal*, Vol. 38, nº 152, pp. 543-559.

Rebelo, S. (1991). “Long-run policy analysis and long-run growth”. En: *Journal of Political Economy,* N° 99, pp. 500-521.

Rincon, J. (1993). “Valor de Shapley en un juego capitalista”. En: *Anales de Estudios Económicos y Empresariales,* N°8, pp. 129-138.

Sidrauski, M. (1967). “Rational choice and patterns of growth in a monetary economy”. En: *American Economic Review Papers and Proceedings, N°* 57**,** pp. 534–544.

Soto, M. (1994). “Distribución, Crecimiento y Empleo. Una solución no cooperativa”. En: *Estudios de Economía Aplicada,* Vol. II, pp. 39-46.

Soto, M. y Fernández, R. (1992). “Estrategias optimas en el juego diferencial de Lancaster con tanto de actualización”. En: *Anales de Estudios Económicos y Empresariales,* N°7, pp. 207-215.

Soto, M. y Fernández, R. (1995) “Estrategias de Stackelberg en un juego diferencial”. *Anales de Estudios Económicos y Empresariales.* N°10, pp. 157-166.

Von Neumann, J. y Morgenster, O. (1944). “*Theory of Games and Economic Behavior”***.** En: John Wiley & Sons, Inc., New York.

De Zeeuw, A. (1992). Note on “Nash and Stackelberg solutions in a differential game model of capitalism”. En: *Journal of Economic Dynamics and Control,* N° 16, pp. 139-145.